Credibility Models

Dr. Virginia Atanasiu
Catedra de Matematică, A. S. E. Bucureşti

The paper presents the mathematical theory of some credibility models, involving complicated properties of conditional expectations and conditional covariance. The fact that is based on complicated mathematics will give more insight and understanding of the theoretical aspects and will point the way to the practical possibilities of the credibility models.
Key words: *the risk premium, the credibility calculations.*

Secţiunea **1.** dezbate din punct de vedere teoretic modelul de credibilitate original al lui Bühlmann, relevându-i importanţa pentru rezultatele viitoare privind credibilitatea în asigurările non-viaţă.
Secţiunea **2.** a articolului constituie una dintre extensiile (generalizările) modelului original al lui Bühlmann, prin introducerea estimării recursive a credibilităţii din acest model.
Tema abordată de secţiunea **3.** vizează, de asemenea, o extensie (generalizare) a modelului original al lui Bühlmann, prin prezentarea aşa-numitului model de credibilitate care încorporează volumul riscului,în sensul că permite variaţia volumului riscului din modelul Bühlmann.

Secţiunea 1

Modelul ce face obiectul acestei secţiuni are drept principal scop estimarea primei nete de risc a unui contract (a unei poliţe) de asigurare non-viaţă, dacă parametrul de risc al său (al ei) este θ. Subliniem faptul că θ este asimilat cu o variabilă aleatoare reală ce descrie caracteristicile riscului X luat în considerare pentru contractul respectiv, iar X cu o variabilă aleatoare nenegativă. Estimatorul ce urmează a fi folosit în scopul mai susmenţionat l-am definit ca estimator liniar şi neomogen, optim în sensul metodei celor mai mici pătrate (m.c.m.m.p.) şi l-am numit estimator liniar şi neomogen de credibilitate pentru prima netă de risc a contractului de asigurare non-viaţă implicat de acest model.
Pentru a ilustra cele spuse, fie: $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_t)$ vectorul $(1\times t)$ aleator al observaţiilor efectuate pe durata a $t(\geq 2)$ ani asupra contractului respectiv. Presupunem: $0 < Var(X_r) < \infty, \forall r = \overline{1,t}$.
Prima netă de risc a contractului de parametru θ am reprezentat-o printr-o funcţie $\mu(\cdot)$ depinzând de parametrul θ al contractului considerat, dar independentă de timp (de anul r al observaţiei, $r = \overline{1,t}$). Deci $\mu(\theta)$ este prima netă de risc a contractului de parametru θ.
Estimatorul liniar şi neomogen de credibilitate al lui $\mu(\theta)$ bazat pe $\underline{X}'$ (adică pe observaţiile efectuate pe durata celor $t(\geq 2)$ ani asupra contractului implicat în modelul pe care-l analizăm acum, adică asupra contractului de parametru θ), notat $\hat{\mu}(\theta)$ este aşa după am afirmat ceva mai devreme, o funcţie de $\underline{X}'$ (adică de variabilele aleatoare observabile ale contractului de parametru θ) liniară şi neomogenă, ceea ce înseamnă că este de forma unei combinaţii liniare şi neomogene a tuturor variabilelor observabile ale respectivului contract, deci de forma:

$$\hat{\mu}(\theta) = a_0 + \sum_{r=1}^{t} a_r X_r,$$

a.î. să minimizeze eroarea medie pătratică a aproximării lui $\mu(\theta)$ prin toate funcţiile $g(\underline{X}')$, liniare şi neomogene de forma:

$$g(\underline{X}') = c_0 + \sum_{r=1}^{t} c_r X_r$$

În concluzie, estimatorul liniar şi neomogen de credibilitate al lui $\mu(\theta)$, adică $\hat{\mu}(\theta)$ (funcţia liniară şi neomogenă a tuturor observațiilor efectuate asupra contractului de parametru $\theta) = a_0 + \sum_{r=1}^{t} a_r X_r$ este, prin definiție, soluția problemei de minim:

$$\underset{\substack{c_0, c_r \\ r=\overline{1,t}}}{Min}\, M\left\{\left[\mu(\theta) - c_0 - \sum_{r=1}^{t} c_r X_r\right]^2\right\}$$

În cele ce urmează, prezint soluția (rezultatul) liniar şi neomogen de credibilitate, pe care am obținut-o în cadrul modelului abordat în studiul de față. În prealabil, realizez o descriere din punct de vedere. probabilistic a acestui model: contractul implicat de modelul original al lui Bühlmann l-am reprezentat din punct de vedere probabilistic sub forma vectorului aleator bidimensional de componente $\theta \wedge \underline{X}'$, unde: prima componentă a vectorului, adică θ este parametrul de risc aleator neobservabil ce caracterizează riscul din contractul considerat, iar a doua componentă a vectorului, adică $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_t)$ este vectorul $(1 \times t)$ aleator al observațiilor efectuate pe durata a $t(\geq 2)$ ani asupra contractului respectiv ($\underline{X}'$ indică observațiile efectuate asupra poliței pe durata a $t(\geq 2)$ ani; X_r reprezintă înregistrarea din anul r pentru contractul considerat; de regulă semnificația lui X_r este aceea de mărimea solicitărilor (cifra pretențiilor) de despăgubire din anul r pentru contractul respectiv, $r = \overline{1,t}$; am presupus că dispunem de înregistrările solicitărilor de despăgubire pe durata $t(\geq 2)$ ani pentru contractul de parametru θ).

Prin urmare, contractul considerat l-am identificat cu perechea (cuplul, v.a.b.) de componente $\theta \wedge \underline{X}'$, ale căror semnificații le-am precizat anterior.

Ipotezele de lucru introduse de Bühlmann sunt următoarele:

(1) pentru θ dat, v.a. observabile (observațiile anuale) $X_r, r = \overline{1,t}$ sunt i.i.d.;

(2) $0 < Var(X_r) < \infty, \forall r = \overline{1,t}$;

(3) $M(X_r \mid \theta) = \mu(\theta), \forall r = \overline{1,t}$ (prima netă de risc este definită ca media condiționată de θ a observațiilor anuale efectuate asupra acestui contract şi este notată printr-o funcție $\mu(\cdot)$ depinzând de θ, dar independentă de $r, r = \overline{1,t}$ (adică de timp); am putut reprezenta media v.a.condiționate $(X_r \mid \theta), r = \overline{1,t}$ prin aceeaşi de funcție $\mu(\cdot)$ depinzând de θ, dar independentă de $r, r = \overline{1,t}$ (adică de timp), întrucât aceste v.a.condiționate sunt i.d.);

(4) $Var(X_r \mid \theta) \overset{not.}{=} \sigma^2(\theta), \forall r = \overline{1,t}$ (am putut reprezenta varianța observațiilor anuale condiționate $(X_r \mid \theta), r = \overline{1,t}$ prin aceeaşi funcție $\sigma^2(\cdot)$ depinzând de θ, dar independentă de $r, r = \overline{1,t}$ (adică de timp sau de anul observației), întrucât aceste v.a. condiționate sunt i.d.);

(5) $Cov(X_r, X_q \mid \theta) = 0, \forall r, q = \overline{1,t}, r < q$ (covarianța dintre observațiile anuale condiționate efectuate asupra contractului θ în ani diferiți este nulă, întrucât aceste v.a.condiționate sunt independente, cu alte cuvinte, observațiile condiționate efectuate asupra contractului de parametru θ în ani diferiți nu sunt corelate).

Observație:

Pentru contractul considerat rezultă următoarea matrice de covarianțe a observațiilor (riscurilor) condiționate din anii $r = \overline{1,t}$ şi anume: $Cov(\underline{X}' \mid \theta) = I^{(t,t)}\sigma^2(\theta)$

Pe baza presupunerilor (1)-(5) formulate de Bühlmann şi a parametrilor de structură notați cu m, s^2, a şi definiți de actuar după cum urmează:

$$\begin{cases} m = M(X_r) = M[\mu(\theta)] \\ s^2 = M[\sigma^2(\theta)] \\ a = Var[\mu(\theta)] \end{cases}$$

am obținut folosind metoda celor mai mici pătrate, rezultatul liniar şi neomogen de credibilitate, în speță prima liniară şi neomogenă de credibilitate, pe care-l ilustrez în continuare: „Estimatorul liniar şi neomogen de credibilitate al primei nete de risc $\mu(\theta)$ pentru contractul de parametru θ, bazat pe $\underline{X}'$ (adică pe observațiile (înregistrările) individuale efectuate asupra contractului considerat), deci $\hat{\mu}(\theta)$ este dat de relația:

$$\hat{\mu}(\theta) = z\overline{X} + (1-z)m,$$

unde: $\overline{X} = \frac{1}{t}\sum_{r=1}^{t} X_r$ este media aritmetică a înregistrărilor individuale pentru respectivul contract, ce indică estimatorul individual pentru $\mu(\theta)$, iar $z = at/(s^2 + at)$ este factorul de credibilitate pentru contractul de parametru θ, ce indică de câtă credibilitate se bucură acestea".

Subliniez că, în acest caz, prima liniară şi neomogenă de credibilitate a contractului considerat, adică $\hat{\mu}(\theta)$ se poate calcula după formula prezentată mai înainte, numai dacă parametrii conținuți de ea şi anume m, s^2, a sunt cunoscuți, ceea ce revine la a presupune că variabila aleatoare θ (variabila de structură) şi $(X_r \mid \theta), r = \overline{1,t}$ (observațiile anuale condiționate sau riscurile anuale condiționate) au repartiții cunoscute.

În continuare prezentăm drept cazuri speciale din perspectiva atît a calculului estimatorului liniar şi neomogen de credibilitate pentru $\mu(\theta)$ (adică a calculului lui $\hat{\mu}(\theta)$), cât şi a formei rezultante a acestuia exemplele:

1) Gama pentru θ cu Poisson de parametru θ pentru $(X_r \mid \theta), r = \overline{1,t}$;

2) Beta pentru θ cu Bernoulli standard de parametru θ pentru $(X_r \mid \theta), r = \overline{1,t}$;

3) Gama pentru θ cu exponențial-negativă de parametru θ pentru $(X_r \mid \theta), r = \overline{1,t}$;

4) $\theta \in N(\mu_0, \sigma_0^2)$, cu $(X_r \mid \theta) \in N(\theta, \sigma^2), r = \overline{1,t}$.

Însă din nefericire, în general nu stăm atât de bine la capitolul calculelor de credibilitate implicate de acest model particular. Pentru multe alegeri ale repartițiilor v.a. θ şi $(X_r \mid \theta), r = \overline{1,t}$, calculul estimatorului liniar şi neomogen de credibilitate pentru $\mu(\theta)$, adică a lui $\hat{\mu}(\theta)$ este dificil, iar formula sa rezultantă nu este o formulă liniară, care să-i satisfacă pe clienții S.A., datorită proprietăților atractive pe care forma liniară le posedă.

Sfera de aplicabilitate a formulei lui $\hat{\mu}(\theta)$ fiind restrânsă (ea vizează cu precădere cazurile speciale redate la 1)-4)), se ridică o problemă în ceea ce priveşte calculul d.p.d.v. practic al lui $\hat{\mu}(\theta)$ după formula prezentată. Problema cu care se confruntă în practica de zi cu zi calculul lui $\hat{\mu}(\theta)$, rezidă în aceea că repartițiile v.a. θ şi $(X_r \mid \theta), r = \overline{1,t}$ sunt în general necunoscute, ceea ce face ca parametrii m, s^2, a conținuți de ea (de formulă) să fie necunoscuți şi deci să necesite a fi estimați (în acest sens se trece la modelul clasic Bühlmann, a se v. [1].).

Secțiunea 2

Estimarea recursivă a credibilității din modelul original al lui Bühlmann constituie una dintre extensiile acestui model, în sensul că riscul pe care-l implică polița de asigurare non-viață nu rămâne în general acelaşi (constant, stabil) în timp, ceea ce înseamnă că pentru fiecare an $i(\geq 1)$ există un alt parametru de risc θ_i, conținând caracteristicile de risc ale poliței din anul i.

Notație: $\theta = \{\theta_i\}_{i\geq 1}$, cu $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \ldots \neq \theta_i \neq \ldots$(cu θ s-a notat şirul parametrilor de risc anuali diferiți (adică ce diferă de la an la an) ai contractului).

Pe baza presupunerilor (1)-(4) ale acestui model, prezentate mai jos şi anume:

(1) pentru θ dat, v.a. (observațiile anuale) $X_i, i \geq 1$ sunt independente (condițional) [$(X_i \mid \theta_i) \wedge (X_j \mid \theta_j)$ sunt independente, dacă $i, j \geq 1$, cu $i \neq j$];

(2) $0 < Var(X_i) < \infty, i \geq 1$;

(3) $M(X_i \mid \theta_i) = \mu(\theta_i), i \geq 1$ (prima netă de risc a contractului din anul i, deci a contractului de parametru θ_i este definită ca media observațiilor (riscurilor) condiționate din acel an i), unde $\mu(\cdot)$ este o funcție cu valori reale, depinzând de θ_i, oricare ar fi $i \geq 1$);

(4) $Cov[\mu(\theta_i),\mu(\theta_j)] = \rho^{|i-j|}\lambda, \forall i, j \geq 1$, cu $0 < \rho < 1$ şi $\lambda > 0$ (v.a. $\mu(\theta_i) \wedge \mu(\theta_j)$ sunt corelate, iar corelaţia între primele nete din ani diferiţi (din anii $i \wedge j$, cu $i \neq j$) descreşte odată cu creşterea distanţei temporale (în timp)), precum şi a parametrilor structurali definiţi după cum urmează:

$$\mu = M(X_i) = M[\mu(\theta_i)], i \geq 1;$$
$$\varphi = M[Var(X_i \mid \theta_i)], i \geq 1;$$
$$\rho;$$
$$\lambda = Var[\mu(\theta_i)], i \geq 1,$$

am obţinut, folosind metoda celor mai mici pătrate şi proceduri de tip recursiv, rezultatele liniare şi neomogene de credibilitate, în speţă primele liniare şi neomogene de credibilitate ale contractului de asigurare non-viaţă, din anii i, cu $i \geq 1$, pe care le ilustrez în continuare:

„Estimatorul liniar şi neomogen de credibilitate pentru prima netă de risc $\mu(\theta_{t+1})$ a contractului din anul $(t+1)$, bazat pe $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_t)$, (deci a observaţiilor efectuate pe durata a $t(\geq 2)$ ani), cu $t \geq 1$, adică $\hat{\mu}(\theta_{t+1})$ este: $\hat{\mu}(\theta_{t+1}) = \alpha_{t_0} + \sum_{j=1}^{t} \alpha_{t_j} X_j, t \geq 1$, cu $0 < \alpha_{t1} < \alpha_{t2} < ... < \alpha_{tt} < 1$, iar estimatorul primei nete de risc $\mu(\theta_1)$ a contractului din anul 1, adică $\hat{\mu}(\theta_1)$ este: $\hat{\mu}(\theta_1) = \mu$".

Observaţie:

Modelul original de credibilitate al lui Bühlmann se obţine din modelul de estimare recursivă a credibilităţii, atunci când $\theta_i = \theta_1, \forall i \geq 1$.

Secţiunea 3

Modelul prezentat de această secţiune apare ca o altă extensie (generalizare) a modelului original al lui Bühlmann, în sensul că permite variaţia volumului riscului din modelul abordat în cadrul secţiunii **1.**, prin încorporarea volumului riscului de acolo. Afirmaţia „volumul riscului nu rămâne constant în timp", trebuie înţeleasă astfel: „# riscurilor din fiecare an de valabilitate a contractului nu este acelaşi, ci variază de la an la an, depinde de anul luat în consideraţie".

Notaţii: P_j =(# riscurilor din anul j), $j = \overline{1,t}$; $Y_{jr}, r = \overline{1,P_j}$ sunt sumele pretinse (solicitate) pentru cele P_j riscuri din anul $j, j = \overline{1,t}$; $S_j = \sum_{r=1}^{t} Y_{jr}$ = (suma totală pretinsă (solicitată) pentru respectivul contract în anul j), $j = \overline{1,t}$; $X_j = S_j / P_j$ = (raportul pierderilor din anul j), $j = \overline{1,t}$; $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_t) =$ (vectorul aleator al pierderilor anuale unitare).

Pe baza presupunerilor (1)-(3) ale acestui model prezentate mai jos şi anume:

(1) pentru θ dat, v.a. $Y_{jr}, r = \overline{1,P_j}, j = \overline{1,t}$ sunt i.i.d., ceea ce implică faptul că pentru θ dat, observaţiile, adică pierderile anuale unitare $\underline{X}'$ sunt i.i.d.;

(2) $M(X_j \mid \theta) = \mu(\theta), j = \overline{1,t}$ (prima netă a contractului de parametru θ se defineşte ca media pierderilor anuale unitare condiţionate);

(3) $Var(Y_{jr} \mid \theta) = s^2(\theta), r = \overline{1,P_j}, j = \overline{1,t}$ (am putut reprezenta varianţa pretenţiilor condiţionate $(Y_{jr} \mid \theta), r = \overline{1,P_j}, j = \overline{1,t}$ prin aceeaşi funcţie $s^2(\cdot)$ depinzând de θ , dar independentă de $j, j = \overline{1,t}$ (de an, de timp), întrucât aceste v.a. condiţionate sunt i.i.d.) $\Rightarrow Var(X_j \mid \theta) = s^2(\theta)/P_j, j = \overline{1,t}$ (ipoteză care este fără dar şi poate cea mai rezonabilă, dacă ţinem seamă de semnificaţia lui P_j), precum şi a parametrilor de structură definiţi de actuarii Bühlmann-Straub, după cum urmează:

$$\begin{cases} \mu = M(X_j) = M[\mu(\theta)], j = \overline{1,t}; \\ \varphi = M[s^2(\theta)]; \\ \lambda = Var[\mu(\theta)], \end{cases}$$

am obţinut, folosind metoda celor mai mici pătrate rezultatul liniar şi neomogen de credibilitate, în speţă prima liniară şi neomogenă, pe care o ilustrez în continuare: „Estimatorul liniar şi neomogen de credibilitate al primei nete de risc $\mu(\theta)$ pentru contractul considerat, bazat pe pierderile anuale unitare înregistrate în decursul a $t(\geq 2)$ ani, adică pe $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_t)$, deci $\hat{\mu}(\theta)$ este dat de relaţia: $\hat{\mu}(\theta) = \frac{P}{P+K}\overline{X}_t + \frac{K}{P+K}\mu$, unde: $P = \sum_{j=1}^{t} P_j =$ (totalul riscurilor din cei $t(\geq 2)$ ani de observaţie efectuaţi asupra contractului), $\overline{X}_t = \frac{1}{P}\sum_{j=1}^{t} P_j X_j =$ (media aritmetică ponderată a pierderilor anuale unitare, ponderile în sumă fiind numerele: $P_j / P, j = \overline{1,t}$).

Observaţii:

1) Estimatorul primei nete de risc a contractului din modelul prezentat se poate calcula cu uşurinţă, întrucât formula sa rezultantă este o formă liniară şi neomogenă în $\overline{X}_t$ (estimatorul individual pentru $\mu(\theta)$) şi μ (estimatorul colectiv pentru $\mu(\theta)$).

2) Modelul original al lui Bühlmann se obţine din modelul care încorporează volumul riscului, pentru $P_j = 1$, $\forall j \geq 1$.

Concluzii

Articolul prezintă teoria matematică a unor modele de credibilitate, implicând proprietăţi complicate ale valorilor medii condiţionate şi ale covarianţelor condiţionate. Faptul că se bazează pe matematici complicate, va conduce la o aprofundare şi la o mai bună înţelegere a aspectelor teoretice şi va deschide calea către posibilităţile practice ale modelelor de credibilitate.

Bibliografie

[1]. **Atanasiu V.,** ***Contributions to the credibility theory,*** thesis of doctorate, University of Bucharest-Faculty of Mathematics, 2000.

[2]. **Atanasiu V.,** ***Calcule de credibilitate,*** Revista „Studii şi Cercetări de Calcul Economic şi Cibernetică Economică" 4 / 1998, XXXII.

[3]. **Goovaerts M.J., Kaas R., Van Herwaarden A.E., BauwelinckxT.,** ***Insurance Series, volume 3, Efective Actuarial Methods,*** University of Amsterdam, The Netherlands, 1991.

[4]. **Pentikäinen T., Daykin C.D., Pesonen M.,** ***Practical Risk Theory for Actuaries,*** Université Pierré et Marie Curie, 1990.

[15]. **Sundt B.,** ***An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics,*** Veroffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim Band 28 , VVW Karlsruhe, 1984.